CONCOURS SPÉCIAL T′

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures. — COEFFICIENT : 6

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

NOTATIONS ET OBJECTIFS DU PROBLÈME

Étant donnés un nombre réel $a > 0$ et un entier $r \geqslant 0$, on note E^r (resp. E^∞) l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes de classe C^r (resp. C^∞) sur $[0, a]$. On note F^r (resp. F^∞) le sous-espace vectoriel constitué des fonctions f telles que, pour tout entier $k \in [0, r]$, $D^k f(0) = 0$ (resp. telles que, pour tout entier $k \geqslant 0$, $D^k f(0) = 0$). Les espaces E^0 et F^0 sont plus simplement notés E et F.

On note P l'opérateur de primitivation, qui à tout élément f de E associe l'élément Pf de E défini sur $[0, a]$ par la relation $Pf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Pour tout entier $r \geqslant 0$, l'opérateur P^r s'appelle primitivation d'ordre r (on convient que $P^0 = I$, où I désigne l'identité).

L'objectif du problème est d'étudier les opérateurs de primitivation P_α d'ordre α réel non entier (ou plus généralement complexe), ce qui fait l'objet des parties III et IV. Dans les deux premières parties, on établit des propriétés préliminaires concernant les fonctions eulériennes Gamma et Bêta.

I. ÉTUDE DE LA FONCTION GAMMA

On note U l'ouvert de $\mathbb{C}$ constitué des nombres complexes $z = x + iy$ tels que $x > 0$. L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction Γ qui à tout élément z de U associe

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1}\,dt. \tag{1}$$

1. *Propriétés de t^z.*

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ et pour tout nombre réel $t > 0$, on pose $t^z = e^{z \ln t}$.

a. Soit φ une fonction à valeurs complexes de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Prouver que $t \mapsto e^{\varphi(t)}$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que $D e^\varphi = e^\varphi D\varphi$. (On écrira φ sous la forme $\varphi = \psi + i\chi$, où ψ et χ sont à valeurs réelles.)

b. En déduire que, pour tout nombre complexe z, $t \mapsto t^z$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que $\frac{d}{dt}(t^z) = zt^{z-1}$.

c. En déduire aussi que, pour tout nombre complexe z et pour tout nombre réel $t > 0$, la fonction $u \mapsto t^{uz}$ est de classe C^1 sur $]-\infty, +\infty[$ et que $\frac{d}{du}(t^{uz}) = z \ln t\, t^{uz}$.

d. Prouver que pour tout nombre complexe $z = x + iy$, $|t^z| = t^x$.

e. Soient c et d des nombres réels tels que $0 < c < d$ et $B_{c,d}$ la bande verticale constituée des éléments z de U tels que $c \leqslant x \leqslant d$. Établir, pour tout élément z de $B_{c,d}$, les majorations suivantes :

$$|t^z| \leqslant t^c \quad \text{si} \quad t \in]0, 1];$$
$$|t^z| \leqslant t^d \quad \text{si} \quad t \in [1, +\infty[.$$

2. *Définition et équation fonctionnelle de la fonction Gamma.*

a. Établir que, pour tout élément $z = x + iy$ de U, l'intégrale (1) est absolument convergente. (On découpera $]0, +\infty[$ en $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$). Montrer que pour tout élément z de U, $|\Gamma(z)| \leqslant \Gamma(x)$.

b. Prouver que, pour tout élément z de U,

$$\Gamma(z + 1) = z\,\Gamma(z), \tag{2}$$

puis que, pour tout entier $k \geqslant 1$,

$$\Gamma(z + k) = (z + k - 1)(z + k - 2) \ldots z\,\Gamma(z). \tag{2'}$$

c. Calculer $\Gamma(1)$, puis $\Gamma(k)$ pour tout entier $k \geqslant 1$.

3. *Continuité de la fonction Gamma.*

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note Γ_n la fonction définie sur U par la relation :

$$\Gamma_n(z) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt.$$

a. Prouver que Γ_n est continue sur U.

b. Montrer que Γ_n converge uniformément sur toute bande verticale $B_{c,d}$ vers Γ.

c. En déduire que Γ est continue sur U.

4. *Dérivabilité de Γ sur l'axe réel.*

Dans cette question, on étudie la dérivabilité de $x \mapsto \Gamma(x)$ sur $]0, +\infty[$. On se propose de prouver que Γ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout entier $r \geqslant 0$,

$$D^r\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (\ln t)^r\, t^{x-1}\, dt. \tag{3}$$

a. Établir la convergence absolue des intégrales (3).

b. En utilisant la suite des fonctions Γ_n, établir, par récurrence sur r, que Γ est de classe C^r sur $]0, +\infty[$ et que $D^r\Gamma$ est donnée par la relation (3).

5. *Convexité logarithmique de Γ.*

a. Soit L^2 l'ensemble des fonctions f à valeurs réelles continues sur $]0, +\infty[$ et telles que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f^2(t)\, dt$ converge.

Montrer que L^2 est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $]0, +\infty[$.

Prouver que l'application $(f, g) \mapsto (f \mid g) = \int_0^{+\infty} f(t)\, g(t)\, dt$, dont on justifiera l'existence, définit un produit scalaire euclidien sur l'espace vectoriel L^2.

b. Grâce à l'inégalité de Schwarz appliquée à des éléments f et g de L^2 convenablement choisis, prouver que, pour tout élément x de $]0, +\infty[$, $\Gamma'^2(x) \leqslant \Gamma(x)\,\Gamma''(x)$.

c. Prouver que, pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$. On pose $\Psi(x) = \ln \Gamma(x)$.

Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de Ψ.

Établir que la fonction Ψ est convexe sur $]0, +\infty[$.

6. *Comportement asymptotique de* Γ *au voisinage de* $+\infty$.

a. Soit δ un élément de $]0, 1]$. Prouver que, pour $x > 1$,

$$\Psi(x) - \Psi(x-1) \leqslant \frac{1}{\delta}[\Psi(x+\delta) - \Psi(x)] \leqslant \Psi(x+1) - \Psi(x).$$

(On utilisera les propriétés des pentes des sécantes de la fonction Ψ).

b. En déduire, sous les mêmes hypothèses, l'équivalence suivante :

$$\frac{\Gamma(x+\delta)}{\Gamma(x)} \sim x^{\delta} \quad \text{lorsque } x \to +\infty. \tag{4}$$

c. Montrer enfin que (4) est encore valable pour tout nombre $\delta > 0$.

Pour cela, on pourra écrire δ sous la forme $\delta = k + \delta'$, où k est entier naturel et $0 < \delta' \leqslant 1$ et utiliser l'équation fonctionnelle (2′).

II. ÉTUDE DE LA FONCTION BÊTA

L'objectif de cette partie est d'étudier la fonction B qui à tout élément (p, q) de $V = U \times U$ associe :

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt. \tag{5}$$

1. *Définition et équation fonctionnelle de* B.

a. Établir que, pour tout élément (p, q) de V, l'intégrale (5) est absolument convergente, et que $|B(p, q)| \leqslant B(p', q')$, où $p' = \operatorname{Re} p$ et $q' = \operatorname{Re} q$.

b. Prouver que, pour tout élément (p, q) de V,

$$B(p, q) = B(q, p).$$

c. Montrer que, pour tout élément (p, q) de V,

$$B(p+1, q) = \frac{p}{p+q} B(p, q).$$

En déduire que :

$$B(p+1, q+1) = \frac{pq}{(p+q)(p+q+1)} B(p, q). \tag{6}$$

2. *Relation fondamentale entre les fonctions Bêta et Gamma.*

On se propose de prouver que, pour tout élément (p, q) de V,

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q) B(p, q). \tag{7}$$

a. Montrer qu'il suffit d'établir (7) lorsque $\operatorname{Re} p > 1$ et $\operatorname{Re} q > 1$.

Dans toute la suite de cette question, on suppose que ces conditions sont satisfaites ; on prolonge alors par continuité en 0 les fonctions $x \mapsto x^{p-1}$ et $y \mapsto y^{q-1}$.

b. Étant donné un nombre réel $b > 0$, on note K_b le carré $[0, b] \times [0, b]$ et on pose, pour tout z tel que $x > 1$,

$$\Gamma_b(z) = \int_0^b e^{-t}\, t^{z-1}\, dt.$$

Prouver que

$$\Gamma_b(p)\,\Gamma_b(q) = \iint_{K_b} e^{-(x+y)}\, x^{p-1}\, y^{q-1}\, dx\, dy.$$

c. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $\varphi(x, y) = (u, v)$, où $u = x + y$ et $v = x$. Prouver que φ est un automorphisme et préciser son déterminant. Exprimer x et y en fonction de u et v.

d. Soit Q_b l'image par φ du carré K_b. Préciser les inéquations portant sur (u, v) qui traduisent l'appartenance de (u, v) à Q_b et tracer Q_b sur une figure.

Prouver que

$$\iint_{K_b} e^{-(x+y)}\, x^{p-1}\, y^{q-1}\, dx\, dy = \iint_{Q_b} e^{-u}\, v^{p-1}\, (u - v)^{q-1}\, du\, dv.$$

e. Soit T_b le triangle constitué des points (u, v) de $\mathbb{R}^2$ tels que $0 \leqslant v \leqslant u \leqslant b$. Établir que $T_b \subset Q_b \subset T_{2b}$ et placer T_b et T_{2b} sur la figure précédente.

f. Prouver que, pour tout élément u de $[0, b]$,

$$\int_0^u v^{p-1}\, (u - v)^{q-1}\, dv = u^{p+q-1}\, B(p, q).$$

En déduire que

$$\iint_{T_b} e^{-u}\, v^{p-1}\, (u - v)^{q-1}\, du\, dv = \Gamma_b(p + q)\, B(p, q).$$

g. On suppose p et q réels, $p > 1$, $q > 1$. À partir des résultats précédents, établir que, pour tout $b > 0$,

$$\Gamma_b(p + q)\, B(p, q) \leqslant \Gamma_b(p)\,\Gamma_b(q) \leqslant \Gamma_{2b}(p + q)\, B(p, q).$$

En déduire la relation (7) lorsque p et q sont réels.

h. On suppose p et q complexes, tels que $p' = \operatorname{Re} p > 1$ et $q' = \operatorname{Re} q > 1$.

Établir que, pour tout $b > 0$,

$$|\Gamma_b(p)\,\Gamma_b(q) - \Gamma_b(p + q)\, B(p, q)| \leqslant [\Gamma_{2b}(p' + q') - \Gamma_b(p' + q')]\, B(p', q').$$

Pour cela, on montrera que pour toute fonction f à valeurs complexes continue sur $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$,

$$\left| \iint_{Q_b} f - \iint_{T_b} f \right| \leqslant \iint_{T_{2b}} |f| - \iint_{T_b} |f|.$$

En déduire la relation (7) dans le cas général.

3. *Zéros de la fonction Gamma.*

a. Prouver que, pour tout élément z de U, $\frac{z}{2}$ appartient à U et que

$$\left[\Gamma\left(\frac{z}{2}\right)\right]^2 = \Gamma(z)\, B\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2}\right).$$

b. Montrer que, pour tout élément z de U, $\Gamma(z) \neq 0$.

On raisonnera par l'absurde en supposant qu'il existe un point w de U tel que $\Gamma(w) = 0$. On prouvera alors que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\Gamma\left(\frac{w}{2^n}\right) = 0$, puis que $\Gamma\left(1 + \frac{w}{2^n}\right) = 0$.

III. PRIMITIVATION D'ORDRE α NON ENTIER

Dans toute la suite du problème, étant donné un élément $\alpha = \beta + i\gamma$ de U, c'est-à-dire tel que $\beta > 0$, on appelle primitivation d'ordre α l'application P_α qui, à tout élément f de E, associe la fonction $P_\alpha(f)$ définie sur $[0, a]$ par la relation :

$$P_\alpha(f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x f(t)\,(x - t)^{\alpha - 1}\,dt. \tag{8}$$

On note L^∞ l'espace des fonctions à valeurs complexes bornées sur $[0, a]$, muni de la norme $f \mapsto N_a(f) = \sup_{t \in [0, a]} |f(t)|$.

On munit l'espace vectoriel E de la norme N_a et, pour tout endomorphisme continu A de E, on pose $\| A \| = \sup_{N_a(f) \leqslant 1} N_a(A(f))$.

Enfin, pour tout élément λ de U, on note e_λ l'élément de E défini par :

$$e_\lambda(t) = \frac{t^\lambda}{\Gamma(\lambda + 1)}.$$

1. *Définition et continuité de* P_α.

a. Établir que, pour tout élément f de E et pour tout élément x de $]0, a]$, l'intégrale (8) est absolument convergente et que

$$|P_\alpha(f)(x)| \leqslant \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \frac{x^\beta}{\beta} N_a(f). \tag{9}$$

On prolonge désormais par continuité $P_\alpha(f)$ en posant $P_a(f)(0) = 0$.

b. Prouver que

$$P_\alpha(f)(x) = \int_0^x f(x - y)\, y^{\alpha - 1}\,dy. \tag{8'}$$

c. Vérifier que $P_\alpha(f)$ appartient à L^∞, que

$$N_a(P_a(f)) \leqslant \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|} \frac{a^\beta}{\beta} N_a(f),$$

et que l'application $f \mapsto P_\alpha(f)$ est linéaire.

En déduire que, pour toute suite (f_n) d'éléments de E convergeant vers f uniformément sur $[0, a]$, alors $(P_\alpha(f_n))$ converge vers $P_\alpha(f)$ uniformément sur $[0, \alpha]$.

d. Prouver que $P_\alpha(1) = e_\alpha$ et que pour tout élément λ de U,

$$P_\alpha(e_\lambda) = e_{\alpha + \lambda}. \tag{10}$$

e. Établir que, pour tout élément f de E, $P_\alpha(f)$ appartient aussi à E. Pour cela, on montrera d'abord, grâce à (10), que pour toute fonction polynomiale Q, $P_\alpha(Q)$ appartient à E. On utilisera ensuite le théorème suivant (que l'on ne demande pas de démontrer) : pour tout élément f de E, il existe une suite Q_n de fonctions polynomiales convergeant vers f uniformément sur $[0, a]$.

f. En conclure que P_α définit un endomorphisme continu de E et que

(11) $$\|P_\alpha\| \leqslant \frac{1}{|\Gamma(\alpha)|}\,\frac{a^\beta}{\beta}.$$

Établir que, si α est réel, (11) est une égalité ; autrement dit $\|P_\alpha\| = \dfrac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$. (On peut prouver que, si α est complexe, (11) est encore une égalité ; cette démonstration n'est pas demandée.)

2. *Équation fonctionnelle de* P_α.

a. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $P_n = P^n$, où P désigne l'opérateur de primitivation.

b. Établir que, pour tout couple (α, α') d'éléments de U,

(12) $$P_\alpha P_{\alpha'} = P_{\alpha+\alpha'}.$$

Pour cela, on utilisera la méthode de 1.*e.*, en prouvant d'abord que les endomorphismes $P_\alpha P_{\alpha'}$ et $P_{\alpha+\alpha'}$ prennent la même valeur sur les fonctions polynomiales.

3. *Régularité de la fonction* $P_\alpha(f)$.

a. On suppose que $\operatorname{Re}\alpha > k$, où k est entier positif.

Montrer que, pour tout élément f de E, $P_\alpha(f) = P^k(P_{\alpha-k}(f))$. En déduire que $P_\alpha(f)$ appartient à F^k et que $D^k P_\alpha(f) = P_{\alpha-k}(f)$.

b. On suppose que f appartient à E^1. Vérifier que $f = P(Df) + f(0)$. En conclure que si, en outre, $f(0) = 0$, alors $P_\alpha(f)$ appartient à F^1 et que $DP_\alpha(f) = P_\alpha D(f)$.

4. *Noyau et image de* P_α.

a. On suppose que $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$. Prouver que, pour tout élément f de E, $DP_{1-\alpha}(P_\alpha(f)) = f$; en déduire que P_α est injectif.

Étendre ce résultat au cas où α est un élément quelconque de U.

b. On suppose à nouveau que $0 < \operatorname{Re}\alpha < 1$.

Prouver qu'un élément g de E appartient à l'image de P_α si et seulement si g appartient à F et $P_{1-\alpha}(g)$ appartient à E^1 et que, dans ces conditions, l'équation $P_\alpha(f) = g$ admet une solution et une seule, à savoir $f = DP_{1-\alpha}(g)$.

Prouver que $F \cap E^1$ est contenu dans $\operatorname{Im} P_\alpha$.

c. Établir que, pour tout élément α de U, P_α induit un automorphisme de F^∞.

IV. ÉTUDE DU SPECTRE DE P_α.

Soit α un élément de U.

1. *Normes des itérés de* P_α.

a. On suppose que α est réel ; autrement dit, $\alpha = \beta$.
Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

(13) $$\|P_\alpha^n\| \leqslant \frac{a^{n\beta}}{\Gamma(n\beta+1)}.$$

b. On suppose que α est un élément quelconque de U, et on pose : $c_\alpha = \dfrac{\Gamma(\beta)}{|\Gamma(\alpha)|}$.

Établir par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, tout élément f de E et tout élément x de $[0, a]$,

$$|P_{n\alpha}(f)(x)| \leqslant c_\alpha^n \, e_{n\beta}(x) \, N_a(f).$$

En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\|P_\alpha^n\| \leqslant c_\alpha^n \frac{a^{n\beta}}{\Gamma(n\beta + 1)}. \tag{13'}$$

c. Soit (u_n) la suite de nombres réels strictement positifs définis par la relation $u_n = c_\alpha^n \dfrac{a^{n\beta}}{\Gamma(n\beta + 1)}$.

Prouver que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (utiliser la relation (4)). En déduire que, pour tout nombre réel $\rho > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \rho^n \|P_\alpha^n\| = 0. \tag{14}$$

2. *Valeurs propres de* P_α.

a. Soit μ un élément non nul de $\mathbb{C}$ et f un élément de $\operatorname{Ker}(P_\alpha - \mu I)$, c'est-à-dire tel que $P_\alpha(f) = \mu f$.

Montrer que $f = 0$ (on prouvera que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $f = \dfrac{1}{\mu^n} P_\alpha^n(f)$).

b. Prouver que l'endomorphisme P_α n'admet aucune valeur propre.

3. *Inversibilité de* $I - \lambda P_\alpha$.

a. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \lambda^n$ est égal à $+\infty$. On note $S_\alpha(\lambda)$ la somme de cette série.

b. Soit λ un nombre complexe ; on pose $\rho = |\lambda|$.

Montrer que, pour tout élément f de E, la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n P_\alpha^n(f)$ est normalement convergente sur $[0, a]$. Soit $R_\lambda(f)$ sa somme. Prouver que R_λ est un endomorphisme continu de E et que

$$\|R_\lambda\| \leqslant S_\alpha(\rho).$$

c. Établir enfin que, pour tout nombre complexe λ, l'endomorphisme $I - \lambda P_\alpha$ admet R_λ pour inverse.

En particulier, pour tout élément g de E, l'équation intégrale

$$f - \lambda P_\alpha(f) = g \tag{15}$$

admet une solution f et une seule dans E, à savoir $f = R_\lambda(g)$.